

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

Кафедра теоретичної кібернетики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана  
з навчальної роботи

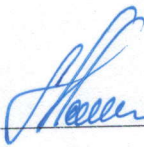
Кашпур О.Ф.

2020 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
ЕЛЕМЕНТИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ/ ELEMENTS OF  
OPTIMAL CONTROL  
для студентів / for students

|                                            |                                                                                                                            |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| галузь знань                               | 12 – Інформаційні технології / Information Technologies<br>(шифр і назва)                                                  |
| спеціальність                              | 122 – Комп'ютерні науки / Computer Science<br>(шифр і назва спеціальності)                                                 |
| освітній рівень                            | магістр / Master<br>(молодший бакалавр, бакалавр, магістр)                                                                 |
| освітня програма                           | «Математичні методи штучного інтелекту» /<br>Mathematical Methods of Artificial Intelligence<br>(назва освітньої програми) |
| вид дисципліни                             | вибіркова / selective                                                                                                      |
| Форма навчання                             | денна                                                                                                                      |
| Навчальний рік                             | 2020/2021                                                                                                                  |
| Семестр                                    | 4                                                                                                                          |
| Кількість кредитів ECTS                    | 4                                                                                                                          |
| Мова викладання, навчання<br>та оцінювання | англійська, українська/<br>Ukrainian, English                                                                              |
| Форма заключного контролю                  | іспит / exam                                                                                                               |

Викладачі: д.ф.-м.н, проф. Крак Ю.В. (лекції)

Пролонговано: на 2021/2022 н.р.  «11» 02 2021 р.  
(підпис, ПІБ, дата)

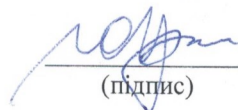
на 20\_\_/20\_\_ н.р. (\_\_\_\_\_) «\_\_» \_\_ 20\_\_ р.  
(підпис, ПІБ, дата)

КИЇВ – 2020

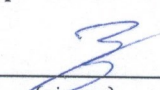
Розробник: **Крак Юрій Васильович**, доктор. фіз.-мат. наук, професор,  
завідувач кафедри теоретичної кібернетики

ЗАТВЕРДЖЕНО

Зав. кафедри теоретичної кібернетики

 (підпис) (Крак Ю.В.)  
(прізвище та ініціали)

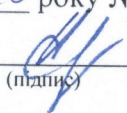
Протокол № 4 від «30» березня 2020 р.

Схвалено Гарантом освітньо-наукової програми «Математичні методи штучного  
інтелекту»  (підпис) (Завадський І.О.)

«2» 04 2020р.

Схвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол від «2» квітня 2020 року № 9

Голова науково-методичної комісії  (підпис) (Омельчук Л.Л.)  
(прізвище та ініціали)

«2» квітня 2020 року



**1. Мета дисципліни** – вивчення і засвоєння основних положень теорії керування, принципів і методів вирішення проблем, пов'язаних з керуванням складними системами та оволодіння практичними навичками розв'язування задач керування.

**Discipline aim.** Study and assimilation the basic principles of control theory, principles and methods for solving problems related to the control of complex systems and acquisition of practical skills for solving control problems.

**2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни (за наявності):**

*Знати:* дискретну математику, математичний аналіз, диференціальні рівняння, алгебру, методи оптимізації, теорію ймовірностей в об'ємі перших двох навчальних років освітнього рівня бакалавр.

*Вміти:* застосовувати отримані знання з базових математичних дисциплін до розв'язання задач теорії керування.

*Володіти елементарними навичками:* роботи з матрицями, знаходження похідних та інтегралів, вирішення нелінійних рівнянь, знаходження оптимальних розв'язків.

Know: discrete mathematics, mathematical analysis, differential equations, algebra, optimization methods, probability theory in the volume of the first two academic years of the bachelor's degree.

Be able to: apply the acquired knowledge of basic mathematical disciplines to solve problems of control theory.

Have basic skills: working with matrices, finding derivatives and integrals, solving nonlinear equations, finding optimal solutions.

**Preliminary demands to master or choice of the course discipline:**

1. *To know* discrete mathematics, mathematical analysis, differential equations, algebra, optimization methods, probability theory in the volume of the first two academic years of the Bachelor's degree.

2. *To be able* to apply the received knowledge on basic mathematical disciplines to the solution of control theory problems.

3. *To possess elementary skills* work with matrixes, finding derivatives and integrals, solving nonlinear equations, finding optimal solutions.

**3. Анотація навчальної дисципліни:**

Дисципліна складається з наступних розділів: постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування; керованість, спостережуваність та ідентифікація систем керування; стійкість руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування; методи варіаційного числення для вирішення задач оптимального керування; метод динамічного програмування; принцип максимуму Понтрягіна.

**Synopsis of the course:**

The discipline consists of the following sections: setting optimal control problems, examples of optimal control problems; controllability, observability and identification of control systems; stability of movement and analytical design of regulators of control systems; variation calculus methods for solving optimal control problems; dynamic programming method; Pontryagin's maximum principle.

**4. Завдання (навчальні цілі):**

- Забезпечення знань: наукового пізнання, форм і методів аналізу та синтезу складних систем та явищ, розуміння предметної області, теоретичних і прикладних положень неперервного та дискретного аналізу, методів чисельного диференціювання та

інтегрування функцій, розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, рішення рівнянь в частинних похідних, теоретичних особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до практичних та інженерних задач;

- формування вмінь: реалізовувати засвоєні поняття, концепції, теорії та методи в інтелектуальній і практичній діяльності, розв'язувати типові задачі;
- формування компетентностей: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях, знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності, здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями, здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт, здатність до математичного та логічного мислення, формулювання та досліджування математичних моделей, здатність опанувати сучасні технології математичного моделювання об'єктів, процесів і явищ;
- здатність спілкуватися іноземною мовою.

### Objectives of study:

- providing knowledge: scientific knowledge, forms and methods of analysis and synthesis of complex systems and phenomena, understanding of the subject area, theoretical and applied provisions of continuous and discrete analysis, methods of numerical differentiation and integration of functions, solving ordinary differential and integral equations, solving equations in partial derivatives, theoretical features of numerical methods and possibilities of their adaptation to practical and engineering problems;
  - formation of skills: to implement the mastered concepts, concepts, theories and methods in intellectual and practical activities, to solve typical problems;
- formation of competencies: ability to abstract thinking, analysis and synthesis; ability to apply knowledge in practical situations, knowledge and understanding of the subject area and understanding of professional activity, ability to learn and master modern knowledge, ability to evaluate and ensure the quality of work, ability to mathematical and logical thinking, formulation and research of mathematical models, ability to master modern mathematical technologies modeling of objects, processes and phenomena;
- ability to communicate in a foreign language

### 5. Результати навчання за дисципліною / Results of learning:

| Результат навчання (РН)<br>(1 – знати; 2 – вміти; 3. комунікація;<br>4. автономність та відповідальність) |                                                                                                            | Форми викладання<br>та навчання                             | Методи<br>оцінювання                                 | Відсоток у<br>підсумковій<br>оцінці з<br>дисципліни |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Код                                                                                                       | Результат навчання                                                                                         |                                                             |                                                      |                                                     |
| РН1.1                                                                                                     | Знати основні поняття теорії керування<br>Know the basic concepts of the control theory                    | Лекція / <i>Lecture</i>                                     | Контрольна робота (КР),<br><i>icnum / Test, exam</i> | 20%                                                 |
| РН1.2                                                                                                     | Знати базові методи керування<br>Know the basic methods of the control theory                              | Лекція / <i>Lecture</i>                                     |                                                      |                                                     |
| РН2.1                                                                                                     | Вміти вирішувати тестові приклади з теорії керування<br>Know how to solve test examples the control theory | Лекція, самостійна робота / <i>Lecture, Individual work</i> | КР, <i>icnum / Test, exam</i>                        | 60%                                                 |
| РН4.1                                                                                                     | Організовувати свою самостійну роботу для досягнення результату<br>To organize your independent work to    | Самостійна робота / <i>Individual work</i>                  | КР, поточне оцінювання / <i>Test, Current</i>        | 10%                                                 |

|       |                                                                                                                                                              |                                            |                                                          |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----|
|       | achieve results                                                                                                                                              |                                            | <i>Evaluation</i>                                        |     |
| PH4.2 | Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їх якість<br>Be responsible for the work performed, be responsible for their quality | <i>Самостійна робота / Individual work</i> | <i>КР, поточне оцінювання / Test, Current Evaluation</i> | 10% |

## 6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання / Correspondence between learning results and program study results

| Результати навчання дисципліни                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | PH1.1 | PH1.2 | PH2.1 | PH4.1 | PH4.2 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Програмні результати навчання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |       |       |       |       |       |
| <i>(з опису освітньої програми)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |       |       |       |       |       |
| ПРН2. Використовувати моделі та методи прийняття рішень на основі теорії нечітких множин та в умовах невизначеності і ризиків в процесі управлінської діяльності за галузями.<br>To use models and methods of decision-making based on fuzzy set theory and in conditions of uncertainty and risk in the management of industries.                                                                                                                                            | +     | +     | +     | +     |       |
| ПРН9. Володіти методами та технологіями організації та застосування даних у задачах обчислювального інтелекту, будувати моделі прийняття рішень на основі теорії розпізнавання образів, нейромереж та нечіткої логіки.<br>To acquire knowledge about methods and technologies of organization and application of data in problems of computational intelligence, to build decision-making models based on the theory of pattern recognition, neural networks and fuzzy logic. | +     |       | +     | +     | +     |
| ПРН10. Використовувати інтелектуальні агенти, мультиагентні системи, машинне навчання та самонавчання, генетичні, кооперативні та розподілені еволюційні алгоритми для комп'ютерного розв'язання задач, що вимагають людського рівня мислення.<br>To use intelligent agents, multi-agent systems, machine learning and self-learning, genetic, cooperative and distributed evolutionary algorithms to solve computer problems that require a human level of thinking.         |       | +     |       | +     | +     |

## 7. Схема формування оцінки / Evaluation scheme.

### 7.1 Форми оцінювання студентів / Forms of evaluation:

#### - семестрове оцінювання / semester evaluation:

1. Розрахункова робота / Test: PH1.1, PH1.2, PH2.1 – **40 балів / 24 балів.**
2. Поточне оцінювання / Current evaluation: PH4.1, PH4.2 – **20 балів / 12 балів.**

#### - підсумкове оцінювання / final evaluation:

- максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом / maximum points : 40 балів;

- результати навчання, які оцінюються / learning outcomes that are evaluated : PH1.1, PH1.2, PH2.1;
- форма проведення / form of holding : письмова робота / written work .
- види завдань / types of tasks : два теоретичні питання / two theoretical tasks (60%), задача / problem (40%).

Студент допускається до екзамену якщо семестрі набрав не менше ніж 36 балів та отримав не менше мінімальної порогової кількості балів за поточне оцінювання та контрольні роботи / The student is admitted to semester exam if scored at least 36 points and received at least the minimum threshold number of points for ongoing evaluation and tests.

Для отримання загальної позитивної оцінки з дисципліни оцінка за іспит має бути не менше 24 балів / For general positive assessment of the course grade for the exam must be at least 24 points..

**Типова контрольна робота 1** складається з теоретичних та практичних завдань за матеріалом частини 1.

Test work 1.

### **Контрольні запитання до Частини 1**

1. Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей.
2. Структурні схеми для опису систем керування.
3. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді. Основні означення та терміни. Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь з розривними правими частинами. Без доведення.
4. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестационарні системи. Теорема про необхідну і достатню умову цілком керованості.
5. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Стационарні системи. Теорема про необхідну і достатню умову цілком керованості.
6. Цілком керованість на заданому проміжку. Теорема про достатню умову цілком керованості на заданому проміжку.
7. Спостережуваність в лінійних системах керування. Теорема про достатню умову існування розв'язку задачі спостережуваності.
8. Спостережуваність в лінійних системах керування. Теорема про достатню умову, що виражається через розв'язок інтегрального рівняння, існування розв'язку задачі спостережуваності.
9. Теорема про зв'язок між спостережуваністю та керованістю.
10. Ідентифікація в системах керування.
11. Керованість, спостережуваність, ідентифікація дискретних лінійних систем.
12. Стійкість за Ляпуновим програмних рухів систем керування.
13. Аналітичне конструювання регуляторів систем керування.
14. Системи першого наближення і другий метод Ляпунова для дослідження стійкості програмних рухів.
15. Постановка задачі оптимального керування як задачі варіаційного числення. Постановка задач Лагранжа, Майєра, Больця.
16. Необхідні умови знаходження оптимальних траєкторій методами варіаційного числення.
17. Умова Якобі та достатні умови екстремуму функціоналів
18. Необхідні і достатні умови для функціоналів вищих порядків
19. Загальна задача Лагранжа.
20. Задача з обмеженнями на керування.
21. Гамільтоніан або канонічна форма рівнянь Ейлера-Лагранжа.

### **Test questions for Part 1**

1. Statement of optimal control problems. Examples of control systems and their mathematical models.
2. Block diagrams to describe control systems.
3. Mathematical formulation of the problem of optimal control in general. Basic definitions and terms. Theorem on the existence and uniqueness of generalized solutions of differential equations with discontinuous right-hand sides. Without proof.
4. Statement and research of controllability problems for linear systems. Non-stationary systems. The theorem on the necessary and sufficient condition of complete controllability.
5. Statement and research of controllability problems for linear systems. Stationary systems. The theorem on the necessary and sufficient condition of complete controllability.
6. Completely controllable at a given interval. Theorem on a sufficient condition of complete controllability on a given interval.
7. Observability in linear control systems. Theorem on the sufficient condition for the existence of a solution of the observability problem.
8. Observability in linear control systems. The theorem on a sufficient condition, which is expressed in terms of the solution of an integral equation, the existence of a solution of the observability problem.
9. Theorems about the relationship between observability and controllability.
10. Identification in control systems.
11. Controllability, observability, identification of discrete linear systems.
12. Stability according to Lyapunov program movements of control systems.
13. Analytical design of control system controllers.
14. Systems of the first approximation and the second Lyapunov method for studying stability of program movements.
15. Statement of the problem of optimal control as a problem of variational calculus. Statement of problems of Lagrange, Mayer, Boltz.
16. Necessary conditions for finding optimal trajectories by methods of variational calculus.
17. Jacobi condition and sufficient extremum conditions of functionals
18. Necessary and sufficient conditions for higher-order functionals
19. The general problem of Lagrange.
20. Problem with control constraints.
21. Hamiltonian or canonical form of Euler-Lanrange equations.

*Типові приклади,, що виноситься на контрольну роботу 1*

1. Задача на умови цілком керованості та спостережуваності.

За яких обмежень на величини  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\omega$  система, що наведена нижче, буде

- а) цілком керованою,
- б) цілком спостережуваною?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \omega x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_2 + b_2 u \end{cases}$$

Спостереження має вигляд:  $y = x_1$ .

2. Розв'язати задачу аналітичного конструювання регулятора для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 2x_2 + u_2 \end{cases}$$

### Typical examples, submitted for test 1

#### 1. The problem in terms of controllability and observability .

Under what constraints on the values  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $\omega$  the system below will be

- a) fully controlled,
- б) fully observable?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \omega x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_2 + b_2 u \end{cases}$$

Observability:  $y = x_1$ .

#### 2. To solve the problem of analytical design of the controller for the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 2x_2 + u_2 \end{cases}$$

### Контрольні запитання до Частини 2.

1. Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана.
2. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом.
3. Метод динамічного програмування (дискретний час).
4. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування. Висновки: переваги та недоліки методу динамічного програмування.
5. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом. Метод динамічного програмування (неперервний час).
6. Теореми про достатню умову оптимальності – метод динамічного програмування (неперервний час). Без доведення.
7. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.
8. Огляд чисельних методів для задач оптимального керування.
9. Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Без доведення .
10. Принцип максимуму Понтрягіна. Теорема про необхідну умову оптимальності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані). Без доведення.
11. Лінійна задача оптимальної швидкодії. На прикладі системи керування, що описується системою 2-х диференціальних рівнянь із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна.
12. Дискретний принцип максимуму. Теорема (дискретний принцип максимуму).

### Test questions for Part 2.

1. Statement of the problem on the method of dynamic programming. Bellman's optimality principle.
2. Bellman's equation for the problem of optimal control with discrete time.
3. Method of dynamic programming (discrete time).
4. The problem of synthesis of optimal control in the method of dynamic programming. Conclusions: advantages and disadvantages of the method of dynamic programming.
5. Bellman's equation for the problem of optimal control with continuous time. Dynamic programming method (continuous time).



6. Theorems on a sufficient condition of optimality - the method of dynamic programming (continuous time). Without proof.
7. The problem of synthesis of optimal control in the method of dynamic programming.
8. Review of numerical methods for optimal control problems.
9. The principle of Pontryagin's maximum. Formulation of the problem. Theorem on the necessary condition of optimality (fixed ends of the trajectory, fixed time). Without proof.
10. The principle of Pontryagin's maximum. Theorem on the necessary condition of optimality (the ends of the trajectory are not fixed - free or moving, the initial and final moments of time - fixed). Without proof.
11. Linear problem of optimal speed. On the example of a control system described by a system of 2 differential equations using the Pontryagin's maximum principle.
12. Discrete principle of maximum. Theorem (discrete principle of maximum).

*Типові приклади,, що виноситься на контрольну роботу 2*

1. За допомогою методу динамічного програмування для дискретних систем розв'язати задачу оптимального керування :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \end{cases} \quad J(u) = \int_0^3 (u(t) + x_2(t)) dt - x_1(3) \rightarrow \inf_u$$

$$x_1(0) = 0$$

$$|x_2(0)| \leq 1, \quad |u(0)| \leq 1, \quad |u(1)| \leq 2, \quad |u(2)| \leq 3.$$

2. Задача на метод принципу максимуму. Серед допустимих кусково-неперервних керувань  $u(t)$  знайти оптимальні або підозрілі на оптимальні керування, що мінімізують функціонал  $J(u)$  на траєкторіях диференціальної системи, наведеної нижче.

$$J(u) = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt - x^2(1) \rightarrow \inf \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0, 1].$$

Обидва кінці траєкторії вільні.

*Typical examples, submitted for test 2*

1. To solve the optimal control problem base on of the dynamical programming method for discrete systems:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \end{cases} \quad J(u) = \int_0^3 (u(t) + x_2(t)) dt - x_1(3) \rightarrow \inf_u$$

$$x_1(0) = 0$$

$$|x_2(0)| \leq 1, \quad |u(0)| \leq 1, \quad |u(1)| \leq 2, \quad |u(2)| \leq 3.$$

2. Problem on the maximum principle. Among the acceptable piecewise continuous controls  $u(t)$  to find optimal or suspicious for optimal control that minimizes functional  $J(u)$  on trajectories of differential systems below.

$$J(u) = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t)) dt - x^2(1) \rightarrow \inf \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0, 1].$$

Both ends of the trajectory are free.

### Питання на іспит

1. Постановка задач оптимального керування. Приклади систем керування та їх математичних моделей.
2. Структурні схеми для опису систем керування.
3. Математична постановка задачі оптимального керування в загальному вигляді. Основні означення та терміни. Теорема про існування та єдиність узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь з розривними правими частинами. Без доведення.
4. Постановка задачі оптимального керування як задачі варіаційного числення. Постановка задач Лагранжа, Майєра, Больця.
5. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Нестационарні системи. Теорема про необхідну і достатню умову цілком керованості.
6. Постановка та дослідження задач керованості для лінійних систем. Стационарні системи. Теорема про необхідну і достатню умову цілком керованості.
7. Цілком керованість на заданому проміжку. Теорема про достатню умову цілком керованості на заданому проміжку.
8. Спостережуваність в лінійних системах керування. Теорема про достатню умову існування розв'язку задачі спостережуваності.
9. Спостережуваність в лінійних системах керування. Теорема про достатню умову, що виражається через розв'язок інтегрального рівняння, існування розв'язку задачі спостережуваності.
10. Теореми про зв'язок між спостережуваністю та керованістю.
11. Матриці імпульсних перехідних функцій та їх обчислення. Спряжені системи. Теорема про властивості розв'язків спряжених систем.
12. Принцип максимуму Понтрягіна. Постановка задачі. Теорема про необхідну умову оптимальності (закріплені кінці траєкторії, фіксований час). Без доведення.
13. Принцип максимуму Понтрягіна. Теорема про необхідну умову оптимальності (кінці траєкторії не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу – фіксовані).
14. Лінійна задача оптимальної швидкодії. На прикладі системи керування, що описується системою 2-х диференціальних рівнянь із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна.
15. Дискретний принцип максимуму. Теорема (дискретний принцип максимуму).
16. Постановка задачі на метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана.
17. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з дискретним часом.
18. Метод динамічного програмування (дискретний час).
19. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.
20. Рівняння Беллмана для задачі оптимального керування з неперервним часом.
21. Метод динамічного програмування (неперервний час).
22. Теореми про достатню умову оптимальності – метод динамічного програмування (неперервний час).
23. Задача синтезу оптимального керування в методі динамічного програмування.
24. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування.

## Exam questions

1. Statement of optimal control problems. Examples of control systems and their mathematical models.
2. Block diagrams to describe control systems.
3. Mathematical formulation of the problem of optimal control in general. Basic definitions and terms. Theorem on the existence and uniqueness of generalized solutions of differential equations with discontinuous right-hand sides. Without proof.
4. Statement of the problem of optimal control as a problem of variational calculus. Statement of problems of Lagrange, Mayer, Boltz.
5. Statement and research of controllability problems for linear systems. Non-stationary systems. The theorem on the necessary and sufficient condition of complete controllability.
6. Statement and research of controllability problems for linear systems. Stationary systems. The theorem on the necessary and sufficient condition of complete controllability.
7. Completely controllable at a given interval. Theorem on a sufficient condition of complete controllability on a given interval.
8. Observability in linear control systems. Theorem on the sufficient condition for the existence of a solution of the observability problem.
9. Observability in linear control systems. The theorem on a sufficient condition, which is expressed in terms of the solution of an integral equation, the existence of a solution of the observability problem.
10. Theorems about the relationship between observability and controllability.
11. Matrices of pulse transition functions and their calculation. Conjugate systems. Theorem on the properties of solutions of conjugate systems.
12. The principle of Pontryagin's maximum. Formulation of the problem. Theorem on the necessary condition of optimality (fixed ends of the trajectory, fixed time). Without proof.
13. The principle of Pontryagin's maximum. Theorem on the necessary condition of optimality (the ends of the trajectory are not fixed - free or moving, the initial and final moments of time - fixed).
14. Linear problem of optimal speed. On the example of a control system described by a system of 2 differential equations using the Pontryagin maximum principle.
15. Discrete principle of maximum. Theorem (discrete principle of maximum).
16. Statement of the problem on the method of dynamic programming. Bellman's optimality principle.
17. Bellman's equation for the problem of optimal control with discrete time.
18. Method of dynamic programming (discrete time).
19. The problem of synthesis of optimal control in the method of dynamic programming.
20. Bellman's equation for the problem of optimal control with continuous time.
21. Method of dynamic programming (continuous time).
22. Theorems on a sufficient condition of optimality - a method of dynamic programming (continuous time).
23. The problem of synthesis of optimal control in the method of dynamic programming.
24. The problem of analytical design of the optimal controller in linear control systems.

## 7.2 Організація оцінювання:

### Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота 1: до 2 тижня семестру.
2. Контрольна робота 2: до 4 тижня семестру.
3. Поточне оцінювання: протягом семестру.

Студент має право один раз перескласти модульну контрольну роботу з можливістю отримати не більше 80% балів, призначених за роботу. Термін перескладання визначає викладач.

За відсутності студента з поважних причин перездача КР здійснюється відповідно до «Положення про організацію освітнього процесу».

### **7.3 Шкала відповідності оцінок**

|                                  |        |
|----------------------------------|--------|
| <b>Відмінно</b> / Excellent      | 90-100 |
| <b>Добре</b> / Good              | 75-89  |
| <b>Задовільно</b> / Satisfactory | 60-74  |
| <b>Незадовільно</b> / Fail       | 0-59   |

## 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій

| № лекції                                                                                                                                                                                                                                               | Назва лекції                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Кількість годин |                    |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------|----------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Лекції          | Практичн і заняття | Самост. робота |
| <b>Частина 1.</b> Проблеми оптимального керування. Керованість, спостережуваність, стійкість, методи варіаційного числення<br><b>Part 1.</b> Problems of optimal control. Controllability, observability, stability, methods of calculus of variations |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                 |                    |                |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>Тема 1.</b> Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування. Структурні схеми систем керування<br><i>Самостійна робота:</i> Розглянути приклади задач керування та дослідити параметри які входять в такі задачі.<br><b>Topic 1.</b> Statement of optimal control problems, examples of optimal control problems. Block diagrams of control systems<br><i>Individual work:</i> Consider examples of control problems and explore the parameters included in such tasks.                                                                                                                                                                                                                            | 2               |                    | 8              |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>Тема 2.</b> Теорема про існування та єдиність узагальнених розв’язків диференційних рівнянь з розривними правими частинами. Постановка та дослідження задач керованості для нестационарних та стаціонарних систем.<br><i>Самостійна робота:</i> Розглянути приклади задач керованості різних класів для нестационарних та стаціонарних систем<br><b>Topic 2.</b> Theorem on the existence and uniqueness of generalized solutions of differential equations with discontinuous right-hand sides. Statement and research of controllability problems for non-stationary and stationary systems.<br><i>Individual work:</i> To consider examples of control problems of different classes for non-stationary and stationary systems | 2               |                    | 7              |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>Тема 3.</b> Критерій керованості для стаціонарних і нестационарних лінійних систем. Зв’язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування<br><i>Самостійна робота:</i> Розв’язування прикладів задач керованості різних класів для нестационарних та стаціонарних систем<br><b>Topic 3.</b> Controllability criterion for stationary and non-stationary linear systems. Relationship between observability and controllability in control systems<br><i>Individual work:</i> Solving examples of controllability problems of different classes for                                                                                                                                                                    | 2               |                    | 8              |



|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |   |  |   |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--|---|
|   | non-stationary and stationary systems                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |  |   |
| 4 | <p><b>Тема 4.</b> Спостережуваність в системах керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю в системах керування. Ідентифікація параметрів систем керування. Керованість, спостережуваність, ідентифікація дискретних систем керування.</p> <p><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на спостережуваність, керованість та ідентифікацію систем керування</p> <p><b>Topic 4.</b> Observability in control systems. Relationship between observability and controllability in control systems. Identification of parameters of control systems. Controllability, observability, identification of discrete control systems.</p> <p><i>Individual work:</i> Solving examples of observability, controllability and identification of control systems</p>                         | 2 |  | 8 |
| 5 | <p><b>Тема 5.</b> Стійкість програмного руху систем керування. Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування. Застосування методів Ляпунова до дослідження стійкості програмних рухів. Системи першого наближення.</p> <p><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на побудову оптимальних регуляторів та дослідження стійкості руху.</p> <p><b>Topic 5.</b> Stability of software movement of control systems. The problem of analytical design of the optimal controller in linear control systems. Application of Lyapunov methods to the study of the stability of program movements. First approximation systems.</p> <p><i>Individual work:</i> Solving examples for the construction of optimal regulators and the study of stability.</p> | 2 |  | 8 |
| 6 | <p><b>Тема 6.</b> Зведення задачі керування до задачі варіаційного числення. Основні задачі варіаційного числення. Необхідні та достатні умови знаходження екстремальних траєкторій. Задачі на умовний екстремум, з обмеженнями на керування. Канонічна форма рівнянь Ейлера-Лагранжа.</p> <p><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання методів варіаційного числення до задач теорії керування</p> <p><b>Topic 6.</b> Reduction of the control problem to the problem of variation calculus. The main problems of calculus of variations. Necessary and sufficient conditions for finding extreme trajectories. Problematic extremal problems, with control constraints. Canonical form of Euler-Lagrange</p>                                                               | 1 |  | 7 |

|                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |  |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--|----|
|                                                                                                                                                                       | equations.<br><i>Individual work:</i> Solving examples for the use of variational calculus methods for problems of control theory                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |  |    |
|                                                                                                                                                                       | <i>Контрольна робота 1 test 1</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1  |  |    |
| <i>Всього за частиною 1</i>                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 12 |  | 46 |
| <b>Частина 2. Метод динамічного програмування. Принцип максимуму Понтрягіна.</b><br><b>Part 2. The method of dynamic programming. Pontryagin's maximum principle.</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |  |    |
| 7                                                                                                                                                                     | <b>Тема 7.</b> Принцип Беллмана і рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Метод динамічного програмування. Алгоритм методу динамічного програмування.<br><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання методу Беллмана для дискретних систем керування<br><b>Topic 7.</b> Bellman's principle and Bellman's equation for systems with discrete time. Dynamic programming method. Algorithm of dynamic programming method.<br><i>Individual work:</i> Solving examples of using the Bellman method for discrete control systems<br><br>The problem of analytical design of the optimal controller in linear control systems.<br><i>Individual work:</i> Solving examples on the use of Bellman's method for constructing an optimal controlle | 2  |  | 8  |
| 8                                                                                                                                                                     | <b>Тема 8.</b> Рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Застосування принципу Беллмана до розв'язування окремих задач.<br><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання методу Беллмана для неперервних систем керування<br><b>Topic 8.</b> Bellman's equation for systems with continuous time. Applying the Bellman principle to individual problems.<br><i>Individual work:</i> Solving examples of using the Bellman method for continuous control systems                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2  |  | 8  |
| 9                                                                                                                                                                     | <b>Тема 9.</b> Рівняння Беллмана в інтегральній та диференціальній формах.<br><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання методу Беллмана в інтегральній та диференціальній формах<br><br><b>Topic 9.</b> Bellman's equation in integral and differential forms.<br><i>Individual work:</i> Solving examples on the use of Bellman's method in integral and differential forms                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2  |  | 7  |
| 10                                                                                                                                                                    | <b>Тема 10.</b> Задача аналітичного конструювання оптимального регулятора в лінійних системах керування.<br><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2  |  | 8  |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |  |    |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--|----|
|    | <p>прикладів на використання методу Беллмана для конструювання оптимального регулятора</p> <p><b>Topic 10.</b> The problem of analytical design of the optimal controller in linear control systems.<br/><i>Individual work:</i> Solving examples on the use of Bellman's method for constructing an optimal controller</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |  |    |
| 11 | <p><b>Тема 11.</b> Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом<br/><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання принципу максимуму Понтрягіна</p> <p><b>Topic 11.</b> Pontryagin's maximum principle for systems with continuous time<br/><i>Individual work:</i> Solving examples on the use of the Pontryagin's maximum principle</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2  |  | 8  |
| 12 | <p><b>Тема 12.</b> Принцип максимуму Понтрягіна для систем з дискретним часом. Умови застосування. Зв'язок між принципом максимуму та класичним варіаційним численням. Задача швидкодії.<br/><i>Самостійна робота:</i> Розв'язування прикладів на використання принципу максимуму Понтрягіна для лінійних і нелінійних систем керування</p> <p><b>Topic 12.</b> Pontryagin's maximum principle for systems with discrete time. Terms of use. Relationship between the principle of maximum and classical variation calculus. The task of speed.<br/><i>Individual work:</i> Solving examples on the use of the Pontryagin's maximum principle for linear and nonlinear control systems</p> | 2  |  | 8  |
|    | <i>Контрольна робота 2 test 2</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2  |  | 7  |
|    | <i>Всього за частиною 2</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 14 |  | 46 |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |  |    |
|    | <b>ВСЬОГО</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 26 |  | 92 |

Загальний обсяг **120** год., у тому числі:  
 лекції – 26 год.  
 консультації – 2 год  
 самостійна робота - 92 год.

## 9. Рекомендовані джерела /References

**Основні / Main :**

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. –328 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.-520 с.
3. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975.-538 с.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978.-320 с.
5. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления.– М.: Мир, 1973.- 324 с.
6. Леонович О.Л., Крак Ю.В. Елементи теорії керування. Навчально-методичний посібник для студентів факультету кібернетики спеціальності "Інформатика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002. – 85 с.
7. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. –М.: Машиностроение, 1968.-764 с.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценки, управление. – М.: Мир, 1972.-544 с.
9. Сейдж З.П., Уайт, III Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. - 392с.
10. Кириченко Н.Ф., Сорока Р.А., Крак Ю.В. Манипуляционные роботы. Алгоритмическое и программное обеспечение средств управления движением. Київ.:КГУ. 1987.
11. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. К:Наук.думка. 1985
12. Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Кириченко М.Ф. Моделювання, аналіз і синтез маніпуляційних систем. К.:Наук. думка. – 2006.
13. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука. 1985
14. Кириченко Н.Ф., Крак Ю.В., Сорока Р.А. Оптимізація маніпуляційних роботів. К.:Либідь. 1990.
15. Крак Ю.В., Шатирко А.В. Теорія керування для інформатиків. К.: ВПЦ "Київський університет". 2015. – 175 с.

***Додаткові / Additional:***

1. Кириченко Н.Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. –Л.: изд. ЛГУ, 1968. -144с.
2. Зубов В.И. Лекции по управлению. – М.: Наука, 1975. - 496 с.